一元二次方程根与系数的关系

若*x*1、*x*2是一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的根，则

可以发现

由此，就有了一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的**根与系数的关系：**

**若*x*1、*x*2是一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的根，则**

**【**这里需要注意一元二次方程的跟与系数的关系成立的前提是**】**

①该方程为一元二次方程；

②该方程有实数根**.**

**例1**.求下列关于*x*的方程的两根的和与积：

(1)*x*2+2*x*+3=0； (2)*x*2-2*ax*-1=0；

(3)2*x*2-2(*p*+2)*x*+*p*2+4=0.

**解：**(1)因为△=4-4×1×3<0，所以原方程无实数根.

(2)因为△=4*a*2+4>0，所以*x*1+*x*2=2*a*，*x*1*x*2=-1.

(3)因为△=4(*p*+2)2-8(*p*2+4)

=4(*p*2+4*p*+4-2*p*2-8)

=4(-*p*2+4*p*-4)=-4(*p*-2)2≤0.

所以当*p*=2时，△=0，*x*1+*x*2=*p*+2=4，*x*1*x*2=4.

当*p*≠2时，△<0，原方程无实数根.

**例2**.已知关于*x*的一元二次方程2*x*2*+mx*+3=0的一个根是求方程的另一个根及*m*的值.

**解：**设方程的另一根是*x*2，由一元二次方程根与系数的关系，得

所以*x*2=3，*m*=-7.

当*m*=-7时，△>0.

所以方程的另一根是3，*m*的值为-7.

**例3**.设一元二次方程4*x*2-7*x*-3=0的两根是*x*1、*x*2..不解方程，求各式的值.

(1)(*x*1-3)(*x*2-3); (2)*x*12+*x*22;

(4)*x*1-*x*2.

解：由题意得，

(1) (*x*1-3)(*x*2-3)=*x*1*x*2-3*x*1-3*x*2+9

=*x*1*x*2-3(*x*1+*x*2)+9

=3.

(4)*x*1-*x*2=±|*x*1-*x*2|

**例4.**当*k*取何值时，关于*x*的一元二次方程3*x*2-2(3*k*+1)*x*+3*k*2-1=0，(1)有两个互为相反数的实数根；(2)两个实数根互为倒数？

**解：**(1)若使方程有两个互为相反数的实根，则

由②得解得

所以当时，△=[-2(3*k*+1)]2-4×3×(3*k*2-1)=8>0，符合题意.

因此当时，原方程有两个互为相反数的实数根.

(2)若使方程的两个实数根互为倒数，则

由④得解得

当时，△=8(3*k*+2)>0，符合题意.

当时，△=8(3*k*+2)=8(-2√3+2)<0，不合题意，舍去.

因此当时，原方程的两个实数根互为倒数.

这里需要注意的是，像*x*2+2*x*+3=0这样的判别式的值小于零的一元二次方程似乎两根之和为-2，两根之积为3，但事实上，这个方程是没有实数根的，也就不存在两根之和与两根之积.因此仅仅依靠根与系数的关系求得*k*的值是不够的，必须通过判别式来进行检验，确保*k*的值能使原方程的确有两个实数根.

**练习19.5(1)**

1.已知一元二次方程2*x*2+*kx*-10=0的一个根是-2，求它的另一根及*k*的值.

2.设*a*、*β*是一元二次方程3*x*2-5*x*-12=0的两根，不解方程，求下列各式的值：

(1)(*a*-*β*)2；

3.已知关于*x*的一元二次方程3*x*2+(*b*2-9*b*+6)*x*-(*b*-2)=0的两个实数根的倒数和为2，求*b*的值

4.设一元二次方程*x*2-*mx*-1=0的两根是*x*1、*x*2.若|*x*1-*x*2|=3，求*m*的值.

我们已知，若*x*1、*x*2是一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的两个根，则

又因为原方程可以化为,即*x*2-(*x*1+*x*2)*x*+*x*1*x*2=0.

由此，在已知一个一元二次方程的两根之和与两根之积时，就可以写出这个一元二次方程.

**例5.**求作一个一元二次方程，使它的两个根是3+和3-，且方程的二次项系数是1.

**解：**设所求作的方程的两个实数根是*x*1、*x*2,*x*1=3+，*x*2=3-，则

*x*1+*x*2=6,*x*1*x*2=7.

因此所求作的方程是*x*2-6*x*+7=0.

**例6.**已知一元二次方程为2*x*2-3*x*-2=0.利用根与系数的关系，求作一个一元二次方程，使它的根分别是已知一元二次方程的各根的平方，且方程的二次项系数是1.

设原方程的两个实数根是*x*1、*x*2，则

*x*1*x*2=-1.

设所求作的一元二次方程的根是*y*1、*y*2，则

*y*1+*y*2=*x*12+*x*22=(*x*1+*x*2)2-2*x*1*x*2=

*y*1*y*2=*x*12*x*22=(*x*1*x*2)2=1.

所以，所求作的一元二次方程为

**例7.**已知两个数的和是10，它们的积是22，求这两个数.

**解：**由根与系数的关系知，这两个数是一元二次方程*x*2-10*x*+22=0的两个根，

解这个方程，得*x*1=5+，*x*2=5-.

所以这两个数是5+与5-.

**19.5(2)**

1.已知一元二次方程为*x*2+3*x*-2=0，不解方程，利用根与系数的关系求作一个新的一元二次方程，使它的两根分别为

(1)已知方程的两根的倒数；

(2)已知方程两根的2倍；

(3)已知方程两根的2倍大1；

(4)一根是原方程两根的和的倒数，另一根是原方程两根的差的平方